数理解析研究所講究録
282巻 1976年 49-62

Asymptotic solutions of certain total differential equations

神戸大 理　髙野 恭一

次の完全積分可能な全微分方程式系を考える.

(E) $\quad dy=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-\sigma_i-1} A_i(x)dx_i\right)y$,

$\sigma_i>0$ integer, yは複素m次元ベクトル, $A_i(x)$は$m\times m$行列で $x=(x_1,\cdots x_n)\in\mathbb{C}^n$について多重角領域$S(\underline{\Theta},\overline{\Theta},r)$ $=\prod_{i=1}^{n} S_i(\underline{\Theta}_i,\overline{\Theta}_i,r)$ で正則で、Sの任意の閉角領域において$x\to 0$のとき

$$A_i(x)\sim\sum_{k\geq 0} A_{ik}x^k$$

と一様に漸近展開されるものとする。ここで

$$S_i(\underline{\Theta}_i,\overline{\Theta}_i,r)=\left\{x_i\in\mathbb{C}\mid \underline{\Theta}_i<\arg x_i<\overline{\Theta}_i,\ |x_i|<r\right\},$$

$k=(k_1,\cdots,k_n)$, $\quad x^k=x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$. 次の仮定をおく。

(仮定) 各i, $1\leq i\leq n$, についてA_{i0}の固有値$\lambda_i^1,\cdots,\lambda_i^m$は distinct.

この小文の目的は $S(\underline{\theta}, \overline{\theta}, r)$ の部分多重角領域で<u>固有領域</u>と呼ばれるところで(E)の漸近解を構成することである。

積分可能条件はよく知られているように

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega,$$

$\Omega = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\sigma_i-1} A_i(x) dx_i$ であることに注意しておく。

§1. 形式解の存在定理.

<u>定理1</u>. 「A_{i0} の固有値が相異なるという仮定のもとで、次のような形式的変換を求めることができる；

$$y = \Big(\sum_{k\geq 0} P_k x^k\Big) z, \qquad \det P_0 \neq 0$$

($\sum_{k\geq 0} P_k x^k$ は形式的巾級数) をうまくとると(E)は次の形の方程式系に変換される,

$$dz = \Big(\sum_{i=1}^{n} \big(\Lambda_i(x_i) + x_i^{-1} R_i \big) dx_i \Big) z$$

ここで

(i) $\Lambda_i(x_i) = \mathrm{diag}\,(\lambda_i^1(x_i), \cdots, \lambda_i^m(x_i))$

$$\lambda_i^\alpha(x_i) = \sum_{h=0}^{\sigma_i-1} \lambda_{ih}^\alpha \, x_i^{-\sigma_i-1+h}$$

$\lambda_{i0}^\alpha = \lambda_i^\alpha \quad \alpha = 1, \cdots m$ は A_{i0} の固有値

(ii) $R_i = \mathrm{diag}\,(\rho_i^1, \cdots, \rho_i^m)$.」

さて

$$\lambda_i^{\alpha *}(x_i) = \int_\infty^{x_i} \lambda_i^\alpha(x_i)\, dx_i$$

とおき、定理1の行列 $\sum_{k\geq 0} P_k x^k$ の第η縦ベクトルを $\sum_{k\geq 0} p_k^{\eta} x^k$ とかくと、

定理2 「(E)は次の形のmコの形式解をもつ。

$$\Big(\sum_{k\geq 0} p_k^{\eta} x^k\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\rho_i^{\eta}}\Big)\exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\eta *}(x_i)\Big),\quad \eta=1,\cdots,m.」$$

証明は形式的変換

$$y=\Big(\sum_{k\geq 0} P_k x^k\Big) z$$

を

$$y = P_0^{(0)} z$$

$$y=\Big(I+\sum_{|k|=N} P_k^{(N)} x^k\Big) z \quad , \quad N=1,2,\cdots$$

の積に分解して行う。先ず(E)を対角化する変換を求め次に定理1で述べた最終的な形にもっていく変換を見つけるという手順で行う。A_{i0}の固有値が相異なるという条件をつけているので、積分可能条件の果す役割は変換を上のように分解しておけば大変みやすい。

§2. 漸近解の存在定理.

結果を述べるために常微分方程式の不確定特異点の理論でよく知られている固有領域の定義を述べる。

$$\mu_i^{\alpha}(x_i) = \mathrm{Re}\,\lambda_i^{\alpha *}(x_i)$$

とおくと

$$\mu_i^{\alpha}(x_i)-\mu_i^{\eta}(x_i)=\sigma_i^{-1}\cos(\sigma_i\theta_i-\omega_i^{\alpha\eta})|x_i|^{-\sigma_i}+O(|x_i|^{-\sigma_i+1})$$

と表わされる。ここで $\theta_i=\arg x_i$, $\omega_i^{\alpha\eta}=\arg(-\lambda_i^{\alpha}+\lambda_i^{\eta})$.

開角領域 $S_i(\underline{\theta}_i,\overline{\theta}_i,r)=\{x_i\in\mathbb{C};\ \underline{\theta}_i<\arg x_i<\overline{\theta}_i\}$ は次の条件を満たすとき $\lambda_i^{\alpha*}(x_i)$ に関する $\lambda_i^{\eta*}(x_i)$ の負領域と呼ばれる。

$$\cos(\sigma_i\varphi-\omega_i^{\alpha\eta})>0 \qquad \text{for} \quad \underline{\theta}_i<\varphi<\overline{\theta}_i \quad .$$

さて、$S_i(\underline{\theta}_i,\overline{\theta}_i,\infty)$ が任意の $\alpha\,(\neq\eta)$ に対して $\lambda_i^{\alpha*}(x_i)$ に関する $\lambda_i^{\eta*}(x_i)$ の負の領域を真に含むことがないとき、$S_i(\underline{\theta}_i,\overline{\theta}_i,\infty)$ は <u>$\lambda_i^{\eta*}(x_i)$ の固有領域</u>といわれる。固有領域の概念は最も広い角領域で漸近解を構成するために福原先生によって得られたものである。([2] 参照)。

すぐわかるように $\overline{\theta}_i-\underline{\theta}_i<\sigma_i^{-1}\pi$ ならば $S_i(\underline{\theta}_i,\overline{\theta}_i,\infty)$ はすべての $\lambda_i^{\eta*}(x_i)$ の固有領域である。

漸近解の存在定理は次のようにのべられる。

<u>定理3</u> 「すべての i について $S_i(\underline{\theta}_i,\overline{\theta}_i,\infty)$ $(\underline{\underline{\theta}}_i\leq\underline{\theta}_i<\overline{\theta}_i\leq\overline{\overline{\theta}}_i)$ が $\lambda_i^{\eta*}(x_i)$ の固有領域であるとする。このとき $S(\underline{\theta},\overline{\theta},r')=\prod_{i=1}^{n}S_i(\underline{\theta}_i,\overline{\theta}_i,r')$ で正則なベクトル関数 $\varphi^\eta(x)$ で次の性質を満たすものが存在する。

(i) $\varphi^\eta(x)\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{\rho_i^\eta}\right)\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\eta*}(x_i)\right)$ は (E) の真の解

(ii) $S(\underline{\theta},\overline{\theta},r')$ において $\varphi^\eta(x)$ は $\sum_{k\geq 0}\varphi_k^\eta x^k$ に漸近展開

される。i.e. $S(\underline{\Theta},\overline{\Theta},r')$ の任意の閉部分多重角領域において

$$\varphi^{\eta}(x)\sim\sum_{k\geq 0}p_k^{\eta}x^k$$

と一様に漸近展開される。

このような $\varphi^{\eta}(x)$ の自由度は任意の i について $S_i(\underline{\Theta}_i,\overline{\Theta}_i,r_0)$ が $\lambda_i^{\alpha *}(x_i)$ に関する $\lambda_i^{\eta *}(x_i)$ の負領域であるというような α $(\neq\eta)$ の個数に一致する。□

注意. 多重角領域 $S(\underline{\Theta},\overline{\Theta},r)$ が広くなればなる程、自由度は小さくなる。(E)において $A_i(x)$ が $x=0$ で正則ならば自由度が 0 即ち $\varphi^{\eta}(x)$ が unique であるように $S(\underline{\Theta},\overline{\Theta},r)$ がとれる。

§3. 定理3の証明の概略

3.1 $\sum_{k\geq 0}P_k x^k$ を定理1の形式的巾級数とするとき、十分大きい l について $y=(\sum_{|k|\leq l}P_k x^k)w$ なる変換をあらかじめほどこしておくことによって、はじめから(E)は

$$dy=\left(\sum_{i=1}^{n}(\Lambda_i(x)+x_i^{-\sigma_i-1}A_i(x))dx_i\right)y$$

でしかも $S(\underline{\Theta},\overline{\Theta},r)$ において

$$A_i(x)\sim\sum_{|k|\geq\sigma_i}A_{ik}x^k$$

と漸近展開されると仮定しておいてよい。

3.2. $\varphi(x)(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\rho_i^n})\exp(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{n*}(x_i))$ が(E)のsol. であることと、$\varphi={}^t(\varphi^1,\dots,\varphi^m)$ が次の方程式のsol. であることと同値である。

$$(3.1)\quad d\varphi^\alpha=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^\alpha(x_i)-\lambda_i^n(x_i))dx_i\Big)\varphi^\alpha+\sum_{\beta=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\sigma_i-1}b_i^{\alpha\beta}(x)dx_i\Big)\varphi^\beta,\quad \alpha=1,\dots,m,$$

ここで

$$b_i^{\alpha\beta}(x)=[A_i(x)]^{\alpha\beta}-\delta_\alpha^\beta\rho_i^n x_i^{\sigma_i},$$

δ_β^α は Kronecker のデルタ。明らかに

$$(3.2)\quad b_i^{\alpha\beta}(x)\sim\sum_{|k|\geq\sigma_i}b_{ik}^{\alpha\beta}x^k\quad\text{as } x\to0\quad x\in S(\Theta,\hat{\Theta},r)$$

3.3. 十分大きい任意のNについて

$$\varphi^\alpha=\sum_{|k|<N+\sigma}p_k^{\alpha n}x^k+\varphi_N^\alpha\qquad \sigma=\max\sigma_i$$

をおくと、(3.1)は

$$(3.3)_N\quad d\varphi_N^\alpha=\Big(\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i^\alpha(x_i)-\lambda_i^n(x_i))dx_i\Big)\varphi_N^\alpha+\sum_{\beta=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\sigma_i-1}b_i^{\alpha\beta}(x)dx_i\Big)\varphi_N^\beta+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\sigma_i-1}c_{iN}^\alpha(x)dx_i,\quad\alpha=1,\dots,m$$

に変換される。$\varphi^\alpha=\sum_{k\geq0}p_k^{\alpha n}x^k$, $\alpha=1,\dots,m$ が(3.1)の解であることより

$$(3.4)\quad c_{iN}^\alpha(x)\sim\sum_{|k|\geq N+\sigma}c_{iNk}^\alpha x^k\quad\text{as } x\to0 \text{ in } S(\Theta,\hat{\Theta},r).$$

従って定理3を証明するためには次のことがいえれば十分である： ϑ_i^α $\alpha\in I$, (Iは定理3の後半で述べられているよう

な α の集合），$1\le i\le n$ （ $\underline{\theta}_i<\vartheta_i^\alpha<\overline{\theta}_i$ ）と $r_N>0$ が存在して次のことがいえる。任意の $c^\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\in I$ と $0<r$ （$\le r_N$）に対して次の条件をみたす $(3.3)_N$ の解が unique に存在する．

(i) $\varphi_N^\alpha(x)$ $\alpha=1,\cdots,m$: $S(\underline{\theta},\overline{\theta},r_N)$ で正則．

(ii) $\varphi_N^\alpha(\xi^\alpha)=c^\alpha$, $\alpha\in I$,

ここで $\xi^\alpha=r\cdot(\exp(\sqrt{-1}\vartheta_1^\alpha),\cdots,\exp(\sqrt{-1}\vartheta_n^\alpha))$

(iii) $\varphi_N^\alpha(x)=O(|x|^N)$.

3.4. 簡単のため

$$\lambda^{\alpha\beta*}(x_i)=\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{\alpha*}(x_j)-\lambda_j^{\beta*}(x_j))$$

とおく。

$$\varphi_N^\alpha(x)=u^\alpha(x)\exp(\lambda^{\alpha 2*}(x))$$

なる変換をすると $(3.3)_N$ は

$$(3.5)_N \qquad du^\alpha=\sum_{\beta=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\sigma_i-1}b_i^{\alpha\beta}(x)\exp(\lambda^{\beta\alpha*}(x))dx_i\Big)u^\beta$$
$$+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\sigma_i-1}c_{iN}^{\alpha}(x)\exp(\lambda^{\eta\alpha*}(x))dx_i,\quad \alpha=1,\cdots,m$$

となる。これは積分方程式

$$(3.6)_N \qquad u^\alpha(x)=u^\alpha(\xi^\alpha)+\int_{\xi^\alpha}^{x}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i^{-\sigma_i-1}\Big\{\sum_{\beta=1}^{m}b_i^{\alpha\beta}(\zeta)\exp(\lambda^{\beta\alpha*}(\zeta))u^\beta(\zeta)$$
$$+c_{iN}^{\alpha}(\zeta)\exp(\lambda^{\eta\alpha*}(\zeta))\Big\}d\zeta_i,\quad \alpha=1,\cdots,m,$$

と同値である。

$$\overline{S}_i(\underline{\theta}_i', \overline{\theta}_i', x_N, \tau_i(\varphi))$$
$$= \left\{ x_i \in \mathbb{C} \;\middle|\; \underline{\theta}_i' \le \arg x_i \le \overline{\theta}_i',\ |x_i| \le x_N \int_{\underline{\theta}_i'}^{\arg x_i} \cot \tau_i(\varphi)\, d\varphi \right\}$$

$\tau_i(\varphi)$ は $[\underline{\theta}_i', \overline{\theta}_i']$ で def. され $\sin \tau_i(\varphi) > 0$ なる区分的連続関数,

$$\overline{S}(\underline{\theta}', \overline{\theta}', x_N, \tau(\varphi)) = \prod_{i=1}^{n} \overline{S}_i(\underline{\theta}_i', \overline{\theta}_i', x_N, \tau_i(\varphi))$$

と定義する。定理3を示すには次のことがいえればよい：

$\underline{\theta}_i', \overline{\theta}_i'$ $\overbrace{(\ \underline{\theta}_i < \underline{\theta}_i' < \overline{\theta}_i' < \overline{\theta}_i}^{i=1,\cdots,n}$, $\underline{\theta}_i'$ は $\underline{\theta}_i$ に $\overline{\theta}_i'$ は $\overline{\theta}_i$ に十分近い) が任意に与えられたとき $[\underline{\theta}_i', \overline{\theta}_i']$ で定義され, $\sin \tau_i(\varphi) > 0$ なる区分的に連続な関数 $\tau_i(\varphi)$ と ξ^α と x を $\overline{S}(\underline{\theta}', \overline{\theta}', x_N, \tau(\varphi))$ の中で結ぶ積分路 Γ_α が存在して (ξ^α は $\alpha \in I$ に対しては 3.3. で与えた形, $\alpha \notin I$ については $\underset{x \to \xi^\alpha}{\exp}(\mu^{n\alpha}(x)) = 0$, 但し $\mu^{n\alpha}(x) = \sum_{i=1}^{n}(\mu_i^n(x_i) - \mu_i^\alpha(x_i))$ であるように選ぶ)、次の積分方程式の解 $u^\alpha(x)$, $\alpha = 1, \cdots m$ で ($u^\alpha(x)$: cont. on $\overline{S}$, hol. in $\overline{S}^\circ$)

$$|u^\alpha(x)| = O\left(\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^N\right) \exp(\mu^{n\alpha}(x))\right)$$

なるものが unique に存在する.

$$(3.7)_N \quad u^\alpha(x) = g(\alpha) C^\alpha + \int_{\Gamma_\alpha} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^{-\sigma_i - 1} \left\{ \sum_{\beta=1}^{m} b_i^{\alpha\beta}(\zeta) \exp(\lambda^{\beta\alpha *}(\zeta)) u^\beta(\zeta) \right.$$
$$\left. + C_{iN}^\alpha(\zeta) \exp(\lambda^{\alpha *}(\zeta)) \right\} d\zeta_i, \quad \alpha = 1, \cdots m.$$

$$g(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \in I \\ 0 & \alpha \notin I \end{cases}$$

上記の命題は「福原の不動点定理」を用いて証明される。次の節で Γ_α のとり方を説明する。$\sigma_i(\varphi)$ のきめ方は沢山の不等式を準備した後でないと説明できないので別の機会にきちんと述べることにしてここでは省略する。

§4、積分路 Γ_α, $\alpha=1,\dots,m$ の選び方

各 i に対して $\alpha=1,\dots,m$, $\alpha\neq\eta$ を次のように分類する。

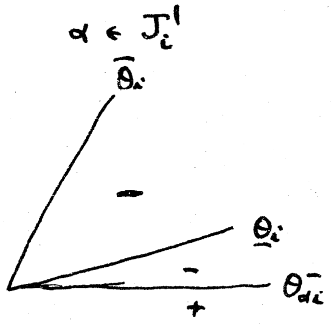
$$J_i^1=\{\alpha \mid \cos(\sigma_i\varphi-\omega_i^{\alpha\eta})<0 \quad \text{for } \underline{\theta}_i<\varphi<\overline{\theta}_i\}$$

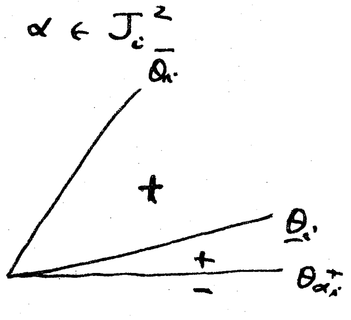
$$J_i^2=\{\alpha \mid \cos(\sigma_i\varphi-\omega_i^{\alpha\eta})>0 \quad \text{for } \underline{\theta}_i<\varphi<\overline{\theta}_i\}$$

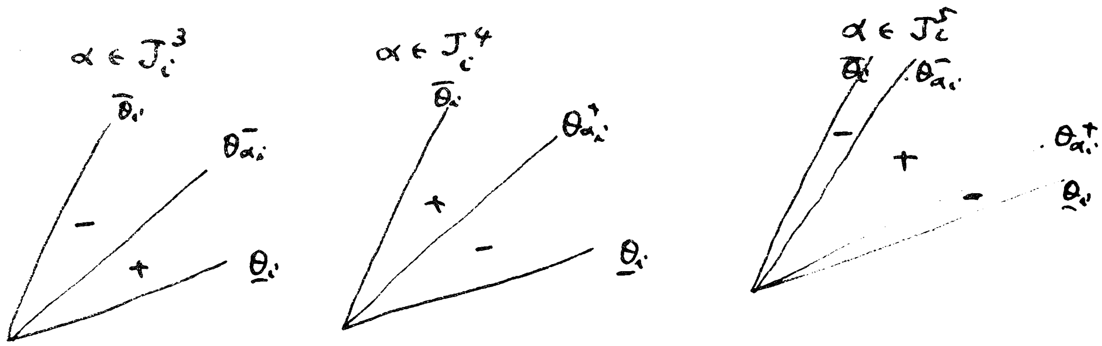
$$\begin{aligned}J_i^3=\{\alpha \mid\ &\cos(\sigma_i\varphi-\omega_i^{\alpha\eta})<0 \quad \text{for } \underline{\theta}_i<\varphi<\theta_{\alpha i}^+\\ &\cos(\sigma_i\varphi-\omega_i^{\alpha\eta})<0 \quad \text{for } \theta_{\alpha i}^+<\varphi<\overline{\theta}_i\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_i^4=\{\alpha \mid\ &\cos(\sigma_i\varphi-\omega_i^{\alpha\eta})>0 \quad \text{for } \underline{\theta}_i<\varphi<\theta_{\alpha i}^-\\ &\qquad {}'' \qquad\qquad <0 \quad \text{for } \theta_{\alpha i}^-<\varphi<\overline{\theta}_i\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_i^5=\{\alpha \mid\ &\cos(\sigma_i\varphi-\omega_i^{\alpha\eta})<0 \quad \text{for } \underline{\theta}_i<\varphi<\theta_{\alpha i}^+\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{or } \theta_{\alpha i}^-<\varphi<\overline{\theta}_i\\ &\qquad {}'' \qquad\qquad >0 \quad \text{for } \theta_{\alpha i}^+<\varphi<\theta_{\alpha i}^-\}\end{aligned}$$







定理3で述べたαの集合 I は

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} J_i^1$$

であることに注意する。

次に $\alpha \in J_i^1$ ($\alpha \in J_i^2$) に対して $\theta_{\alpha i}^-$ ($\theta_{\alpha i}^+$) を

$$\cos(\sigma_i \theta_{\alpha i}^{\pm} - \omega_i^{q\eta}) = 0$$

$$\cos(\sigma_i \varphi - \omega_i^{q\eta}) < 0 \quad (>0), \quad \theta_{\alpha i}^- < \varphi < \bar{\theta}_i \quad (\theta_{\alpha i}^+ < \varphi < \bar{\theta}_i)$$

によってきめる。 $S_i(\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i, \infty)$ が $\lambda_i^{q,*}(x_i)$ の固有領域であること、$\underline{\theta}_i^1$, $\bar{\theta}_i^1$ が $\underline{\theta}_i$, $\bar{\theta}_i$ に十分小さいことから、次の不等式をみたす $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i^1 > 0$ が存在する。

$$(\theta_{\alpha i}^- + \sigma_i \pi) - \bar{\theta}_i > \varepsilon_i \qquad \alpha \in J_i^3$$

$$\underline{\theta}_i - (\theta_{\alpha i}^+ - \sigma_i^{-1}\pi) > \varepsilon_i \qquad \alpha \in J_i^4$$

$$(\theta_{\alpha i}^- + \sigma_i^{-1}\pi) - \bar{\theta}_i, \quad \underline{\theta}_i - (\theta_{\alpha i}^+ - \sigma_i^{-1}\pi) > \varepsilon_i \qquad \alpha \in J_i^5$$

$$4\varepsilon_i^1 < \varepsilon_i$$

$$(\theta_{\alpha i}^- + \sigma_i^{-1}\pi) - \bar{\theta}_i^1, \quad \underline{\theta}_i^1 - \theta_{\alpha i}^- > 4\varepsilon_i^1 \qquad \alpha \in J_i^1$$

$$(\theta_{\alpha i}^+ + \sigma_i^{-1}\pi) - \bar{\theta}_i^1, \quad \underline{\theta}_i^1 - \theta_{\alpha i}^+ > 4\varepsilon_i^1 \qquad \alpha \in J_i^2$$

4.1. Γ_η のとり方

Γ_η は 0 と x を結ぶ折線で、例えば

$$0 \le |x_1| \le |x_2| \le \cdots \le |x_n|$$

ならば　$\Gamma_\eta : (\zeta_1(t), \cdots, \zeta_n(t))$ として

$$\zeta_i(t) = \begin{cases} x_i \cdot \left|\dfrac{x_n}{x_i}\right| t , & 0 \le t \le \left|\dfrac{x_i}{x_n}\right| \\ x_i & \left|\dfrac{x_i}{x_n}\right| \le t \le 1 \end{cases}$$

で与える。

4.2. Γ_α $(\alpha \ne \eta)$

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_{\alpha 1} + \cdots + \Gamma_{\alpha n}$$

$\Gamma_{\alpha i}$ は $(x_1, \cdots x_{i-1}, \xi_i^\alpha, \xi_{i+1}^\alpha, \cdots, \xi_n^\alpha)$ と $(x_1, \cdots x_{i-1}\, x_i\, \xi_{i+1}^\alpha, \cdots)$ と結ぶ道で、x_i-plane 上の道と考えてよい。以下 $\{\Gamma_{\alpha i}\}_{\substack{\alpha \ne \eta \\ i=1,\cdots n}}$ のきめ方を説明する。

4.2.1. $\Gamma_{\alpha i}$: $\alpha \in J_i^1$ の場合

$\{\vartheta_i^\alpha\}_{\substack{i=1,\cdots n \\ \alpha \in J_i^1}}$ と次のようにきめておく。

$$\underline{\theta}_i < \vartheta_i^\alpha < \overline{\theta}_i$$

$$\vartheta_i^\alpha < \vartheta_i^\beta \quad \text{if} \quad \theta_{\alpha i}^- > \theta_{\beta i}^-$$

$$\vartheta_i^\alpha = \vartheta_i^\beta \quad\quad \theta_{\alpha i}^- = \theta_{\beta i}^- .$$

さて、

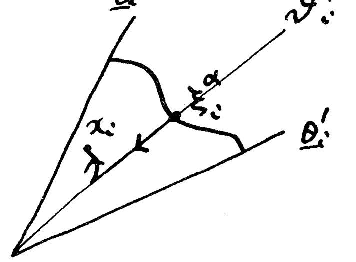
始点 : $\xi_i^\alpha = r_N \exp\left(\int_{\underline{\theta}_i}^{\vartheta_i^\alpha} \cot \tau_i(\varphi)\, d\varphi + \sqrt{-1}\, \vartheta_i^\alpha\right)$

とし，$\Gamma_{\alpha_i} = \Gamma_{\alpha_i}^{(1)} + \Gamma_{\alpha_i}^{(2)}$

$\Gamma_{\alpha_i}^{(1)}$: $\arg \zeta_i = \vartheta_i^{\alpha}$,

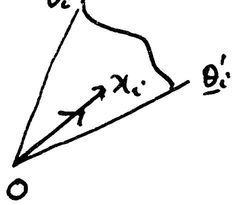
$$|x_i| \exp\left(\int_{\arg x_i}^{\vartheta_i^{\alpha}} \cot \tau_i(\varphi)\, d\varphi\right) \leq |\zeta_i| \leq r_N \exp\left(\int_{\underline{\theta}_i'}^{\vartheta_i^{\alpha}} \cot \tau_i(\varphi)\, d\varphi\right)$$

$\Gamma_{\alpha_i}^{(2)}$: $\zeta_i(\varphi) = |x_i| \exp\left(\int_{\arg x_i}^{\varphi} \cot \tau_i(\varphi)\, d\varphi + \sqrt{-1}\,\varphi\right)$



4.2.2. Γ_α : $\alpha \in J_i^2$

このときは $\xi_i^{\alpha} = 0$ より x_i への直線を Γ_{α_i} にとる．



4.2.3. Γ_α : $\alpha \in J_i^3 \cup J_i^4 \cup J_i^5$

$\theta_i = \arg x_i$ として，$\cos(\sigma_i \theta_i - \omega_i^{\alpha\eta}) \geqq \sin(4\sigma_i \varepsilon_i')$ のときは $\xi_i^{\alpha} = 0$ と x_i をむすぶ直線．

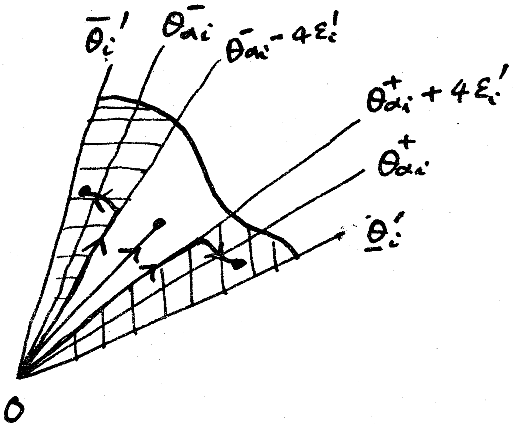
$\cos(\sigma_i \theta_i - \omega_i^{\alpha\eta}) < \sin(4\sigma_i \varepsilon_i')$ のときは $\Gamma_{\alpha_i} = \Gamma_{\alpha_i}^{(1)} + \Gamma_{\alpha_i}^{(2)}$ で $\bar{\theta}_{\alpha_i} - 4\varepsilon_i' \leq \arg x_i \leq \bar{\theta}_i'$ のときは

$$\Gamma_{\alpha_i}^{(1)}: \quad \arg \zeta_i = \theta_{\alpha_i}^- - 4\varepsilon_i'$$

$$0 \le |\zeta_i| \le |x_i| \left(\exp \int_{\arg x_i}^{\theta_{\alpha_i}^- - 4\varepsilon_i'} \cot T_i(\varphi)\, d\varphi \right),$$

$$\Gamma_{\alpha_i}^{(2)}: \quad \zeta_i(\varphi) = |x_i| \exp\left(\int_{\arg x_i}^{\varphi} \cot T_i(\varphi)\, d\varphi + \sqrt{-1}\,\varphi \right), \quad \theta_{\alpha_i}^- - 4\varepsilon_i' \le \varphi \le \arg x_i$$

$\underline{\theta}_i' \le \arg x_i \le \theta_{\alpha_i}^+ + 4\varepsilon_i'$ のときも同じようにきめる。$\alpha \in J_i^S$ の場合を絵で説明すると、



以上のようにして積分路 Γ_α $\alpha = 1, \cdots, m$ ときめておいて、(3.7)$_N$ の右辺の積分の評価式を求め、不動点定理と uniqueness がいえるように $T_i(\varphi)$ やいくつかの定数をうまくきめてやると証明が完了する。

References

[1] E. A. Coddington and N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[2] M. Hukuhara, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires III, Mém. Fac. Sci. Kyushu Univ. 2 (1941), 125–137.

[3] W. Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience Publishers, New York, 1965.

[4] M. Yoshida and K. Takano, Local theory of Fuchsian systems I, Proc. Japan Acad. Vol. 51, No 4 (1975), 219–223.